Ćwierćfinał XXI Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych

CE	uczniowie klasy III SP lub młodsi
CM	uczniowie klas IV oraz V SP
C1	uczniowie klas VI oraz VII SP
C2	uczniowie klasy VIII SP i klasy pierwszej szkół średnich
L1	pozostali uczniowie szkół średnich
L2	studenci kierunków ścisłych, urodzeni nie wcześniej niż w roku 1995
HC	• osoby zawodowo zajmujące się matematyką, w szczególności pracownicy naukowi szkół wyższych, placówek naukowo-badawczych, • finaliści etapu międzynarodowego w kategorii GP lub HC, w ciągu dwóch lat od tego finału
GP	dorośli nie występujący w kategorii L2 oraz HC, w tym uczniowie szkół pomaturalnych.

Początek wszystkich kategorii

1. Dwie daty

Mateusz posiada 12 kart z cyframi

0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5

i układa z nich daty. Pierwszą datą 2025 roku, którą może ułożyć używając dwóch kart tworzących numer dnia, dwóch innych kart tworzących numer miesiąca i czterech innych kart tworzących numer roku, będzie 13. stycznia:

1 3   0 1   2 0 2 5

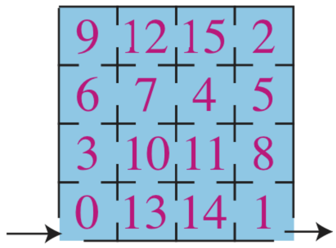
Jaka będzie ostatnia data w 2025 roku, którą Mateusz może ułożyć z ośmiu spośród tych dwunastu kart?

2. Akwarium

W akwarium żyją ośmiornice o ośmiu ramionach i rozgwiazdy o pięciu ramionach.

Ile jest w akwarium rozgwiazd, jeżeli wiadomo, że łączna liczba ramion wszystkich żyjących w nim zwierząt wynosi 41?

3. W labiryncie



W labiryncie pomieszczenia są ponumerowane od 0 do 15. Przejście pomiędzy pomieszczeniami uruchamia alarm, z wyjątkiem:

– przejścia do pomieszczenia o numerze o 3 większym niż opuszczane,

– lub, przejścia do pomieszczenia o numerze o 13 mniejszym niż opuszczane. Wchodzimy do labiryntu przez pomieszczenie o numerze 0 a wychodzimy przez pomieszczenie o numerze 1.

Przez ile pomieszczeń przejdziemy (wliczając w to pomieszczenia o numerach 0 i 1), jeżeli po drodze ani razu nie uruchomimy alarmu?

4. Gnaj na 2025!

$$\begin{array}{rcccc} & \mathrm{G} & \mathrm{N} & \mathrm{A} & \mathrm{J} \\ + & & & \mathrm{N} & \mathrm{A} \\ \hline = & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

W tym zakodowanym dodawaniu różne litery kodują różne cyfry a ta sama cyfra jest zawsze zakodowana tą samą literą. Dodatkowo, żadna z liczb wielocyfrowych nie zaczyna się od zera.

Jaka jest wartość NA?

5. Czworo przyjaciół

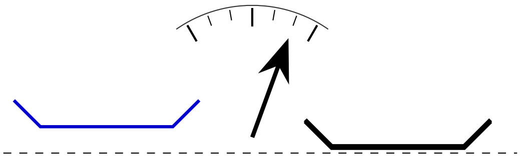
Anna, Bartosz, Cezary i Danuta to czwórka przyjaciół. Każde z nich przygotowuje się do wykonywania konkretnego zawodu: archeologa, bibliotekarza, chirurga i dentysty. Wiadomo, że Bartosz będzie dentystą. Tylko jedna z tych osób kształci się w zawodzie, którego pierwsza litera pokrywa się z pierwszą literą jego/jej imienia, ale nie jest to Anna.

Jakie zawody wybrały Anna i Danuta?

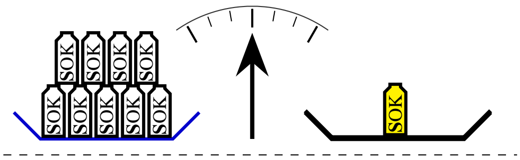
Koniec kategorii CE

6. Zgubiona misa

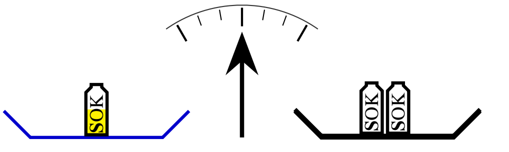
Robert zgubił prawą misę do swojej wagi szalkowej i musiał użyć innej — nieco cięższej niż oryginalna. Teraz, przy pustych misach, jego waga nie wskazuje równowagi.



Robert zauważył jednak, że gdy na prawej misie ustawi pełną butelkę z sokiem, a na lewej misie ustawi 9 takich samych ale pustych butelek, to jego waga będzie w równowadze.

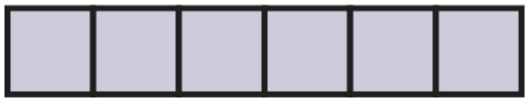


Tak samo się stanie, gdy na prawej misie Robert ustawi dwie takie puste butelki, a na lewej butelkę wypełnioną sokiem do połowy.



Ile razy butelka z sokiem jest cięższa od pustej butelki?

7. Na plus



Umieść wszystkie liczby 1, 2, 3, 4, 5, 7 w kratkach w taki sposób, aby pierwsza z liczb była mniejsza od ostatniej i aby w każdych kolejnych trzech kratkach znajdowały się dwie liczby oraz ich suma.

8. Czapki

Pola posiada parę pluszowych potworów: trójgłowego Cerberka i dwugłowego Smoczka. Bardzo lubi bawić się tymi pluszakami zakładając im na głowy czapki. Pola ma cztery jednakowe czapki białe, dwie jednakowe czapki zielone oraz jedną czapkę czerwoną. Wiadomo, że każda z tych czapek może być założona na dowolną głowę Cerberka lub Smoczka.

Na ile różnych sposobów Pola może założyć czapki swoim pluszakom tak, aby na każdej głowie była dokładnie jedna czapka? Dwa sposoby założenia czapek uznajemy za różne, gdy na przynajmniej jednej głowie jednego z pluszaków założone czapki są różnych kolorów.

Koniec kategorii CM

Uwaga do zadań od 9 do 18: aby zadanie było całkowicie rozwiązane należy podać liczbę jego rozwiązań i rozwiązanie, jeśli jest jedyne, albo dowolne dwa rozwiązania, jeżeli jest ich więcej niż jedno. W karcie odpowiedzi przewidziano dla wszystkich zadań mogących mieć wiele rozwiązań miejsce na wpisanie 2 rozwiązań (ale może się zdarzyć, że jest tylko jedno rozwiązanie).

9. Planeta Mats

Na planecie Mats doba nie trwa 24 godzin, jak na Ziemi. Na matemskiej tarczy zegarowej wszystkie godziny doby są rozmieszczone w równych odstępach na okręgu. Wskazówka godzinowa w ciągu jednej doby robi jeden obrót wokół tarczy. Ponadto, wskazówka godzinowa pokonuje taką samą drogę od godziny pierwszej do dziewiątej i od godziny dziesiątej do drugiej.

Ile godzin liczy doba na tej planecie?

10. Summa summarum et multiplicationum

Liczba całkowita mająca własność summa summarum et multiplicationum jest równa sumie sumy i iloczynu swoich cyfr. Na przykład liczba 59 ma tę własność, gdyż

$$(5+9)+(5\cdot 9)=14+45=59.$$

Ile jest liczb dwucyfrowych o tej własności (wliczając 59)?

11. Trzy kwadraty

Mathias narysował trzy kwadraty o długościach boków wyrażających się całkowitymi liczbami centymetrów. Dwa z tych kwadratów są identyczne. Suma pół wszystkich kwadratów jest równa $2025\,\mathrm{cm}^2$.

Jaki jest obwód w centymetrach najmniejszego z tych kwadratów (jednego z dwóch najmniejszych, jeżeli są równe)?

Koniec kategorii C1

12. Uśrednijmy

$$\mathbf{25}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{250}, \mathbf{C}, \ldots$$

W tym ciągu liczbowym, każda z liczb począwszy od drugiej jest średnią arytmetyczną liczb, które z nią bezpośrednio sąsiadują.

Ile jest równe C?

13. Wyniki konkursu

W pewnym konkursie, którego nazwę zachowamy w tajemnicy, uczestnicy rozwiązują 18 zadań ponumerowanych od 1 do 18. Każda odpowiedź może być albo prawidłowa albo nie. Na wynik każdego z zawodników składa się po pierwsze liczba odpowiedzi prawidłowych, a po drugie, suma numerów zadań, do których podali prawidłowe odpowiedzi. Jeżeli dwaj zawodnicy mają taką samą sumę prawidłowych odpowiedzi, wygrywa ten, który ma większą sumę numerów zadań, do których podał prawidłowe odpowiedzi. W ostatniej edycji konkursu, po uwzględnieniu obu wyników, nie było remisów.

Ilu co najwyżej uczestników było w tym konkursie?

14. Aż do 2025

Konstruujemy ciąg złożony z liczb całkowitych dodatnich, w którym kolejną liczbę oblicza się jako sumę liczby poprzedzającej i podwojonej sumy cyfr liczby poprzedzającej. Na przykład, zaczynając od liczby 1000 otrzymamy

– w pierwszym kroku: $1002 = 1000 + 2(1 + 0 + 0 + 0)$,

– w drugim kroku: $1008 = 1002 + 2(1 + 0 + 0 + 2)$,

– w trzecim : $1026 = 1008 + 2(1 + 0 + 0 + 8)$, itd.

Ile liczb początkowych mniejszych od 2025 da ciąg, w którym wystąpi liczba 2025?

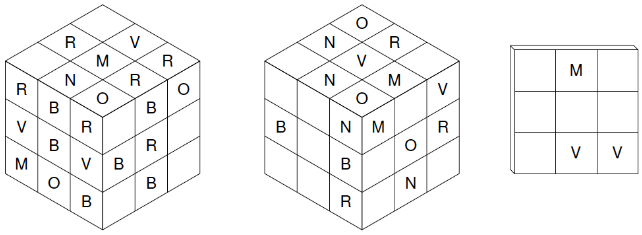
Koniec kategorii C2

15. Matrioszki

Ulubiona zabawka Matyldy, komplet matrioszek, liczy 13 figurek ponumerowanych od 1, najmniejszej, do 13, największej. Do wnętrza dowolnej większej figurki można włożyć dowolną jedną mniejszą, która z kolei może zawierać kolejną jeszcze mniejszą itd, tak, że przy w pełni złożonej zabawce pozostaje widoczna tylko matrioszka numer 13. Pod nieobecność Matyldy Mateusz zabawiał się matrioszkami. Po powrocie Matylda widzi na stole pewną liczbę matrioszek. Wie również, że wszystkie matrioszki, których nie widzi, znajdują się, jedne w drugich, wewnątrz tych, które widzi. Matylda zastanawia się, jak mogą być porozmieszczane matrioszki, których nie widzi i uświadamia sobie, że jest 2025 możliwości.

Jakie są numery matrioszek, które widzi? Odpowiedź podaj w postaci malejącego ciągu numerów.

16. Kostki



W ubiegłym stuleciu pewna archeolożka odkryła liczący 3000 lat sześcian. Ustaliła, że został on wytworzony w następujący sposób. Najpierw 27 małych sześcianów złożono w jeden duży, następnie pomalowano jedną ścianę na rubinowo, jedną na bursztynowo, jedną na verdigris, jedną na nawłociowo, jedną na miętowo i jedną na oliwkowo. Następnie rozłożono duży sześcian znów na małe sześciany, wymieszano i znów złożono z nich duży sześcian, ale tak, że widoczne były tylko pomalowane ściany małych sześcianów. Niestety sześcian spłonął w pożarze krótko po tym, jak został odkryty. Zachowały się tylko trzy zdjęcia, co gorsza, czas zatarł na nich niektóre z kolorów. Wnuczka archeolożki próbuje dzisiaj odtworzyć oryginalne kolory. Dla ułatwienia zadania opisała niezatarte pola pierwszymi literami ich nazw.

Pomóż jej i uzupełnij kolory na trzecim zdjęciu. Odpowiedzi wpisz, podając wszystkie litery wierszami.

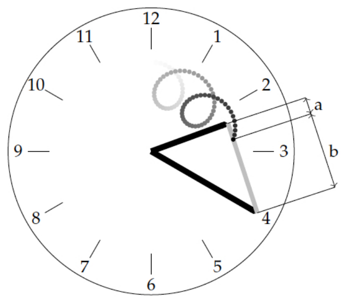
Koniec kategorii L1, GP

17. Urny i kule

Dwóch kolegów gra w grę. Każdy z nich ma jedną urnę białą, w której na początku są dwie kule czarne i jedną urnę czarną, w której na początku są dwie kule białe. W każdej rundzie pierwszy z graczy losuje po jednej kuli z każdej ze swoich urn i zamienia je miejscami, a drugi gracz losuje jedną kulę z urny białej i przekłada ją do urny czarnej a następnie losuje jedną kulę z urny czarnej i przekłada ją do urny białej. Pierwszy z graczy, który po danej rundzie będzie miał dwie kule białe w urnie białej i dwie kule czarne w urnie czarnej wygrywa. Jeżeli obaj osiągną cel w tej samej rundzie, obaj wygrywają.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy gracz wygra? Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

18. Tik-Tak



Tik zamocował gumkę do końców dwóch wskazówek zegara, z których godzinowa ma 2 cm a minutowa 3 cm długości. Tak zaznaczył czarny punkt gdzieś na gumce, ale punkt ten nie jest w żadnym z jej końców. Kiedy zegar chodzi, ten czarny punkt się przemieszcza, a proporcja długości a/b pozostaje stała (patrz rysunek). Widzimy, że punkt zaznaczony na rysunku wyznacza krzywą, która przecina się ze sobą.

Tik i Tak powtarzają doświadczenie, ale ponieważ zaznaczyli punkt w innym miejscu, okazuje się, że tym razem krzywa nie przecina się ze sobą.

Jaka jest największa wartość proporcji długości a/b przy której krzywa wyznaczana przez punkt na gumce nie przecina się ze sobą? Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Koniec kategorii L2, HC